一类具有 4∶−5 共振奇点的复三次 Lotka-Volterra 系统的可积性条件*

桑　波
（聊城大学数学科学学院，山东 聊城 252059）

摘　要：对于一类具有 4∶−5 共振奇点的复三次 Lotka-Volterra 系统，通过前 8 阶广义奇点量的计算，给出系统可积的充分条件。这些条件是通过构造积分因子或形式首次积分得以验证。

关键词：4∶−5 共振奇点；可积性；积分因子；广义奇点量；形式首次积分

中图分类号：O175.12　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529−6579（2013）06−0044−05

Integrability Conditions for a Class of Complex Cubic Lotka-Volterra Systems with a 4∶−5 Resonant Singular Point

SANG Bo
（School of Mathematics Sciences，Liaocheng University，Liaocheng 252059，China）

Abstract：For a class of complex cubic Lotka-Volterra systems with a 4∶−5 resonant singular point，the sufficient conditions for integrability are obtained through the computation of the first eight generalized singular point values. All these conditions are verified by constructing integrating factors or formal first integrals.

Key words：4∶−5 resonant singular point；integrability；integrating factor；generalized singular point value；formal first integral

当线性孤立奇点是中心时其非线性项的影响可使相图是非退化中心或是稳定焦点或不稳定焦点，这类判定问题称为中心焦点问题。自 1904 年 Dulac 研究二次系统的中心判定以来，中心焦点问题受到一些学者的广泛关注。它对 Arnold 问题、可积性问题和 Hilbert 第十六问题后半部分的解决都具有重要意义。Bautin 完整解决了二次系统的中心焦点判定问题；Sibirskii 解决了缺少二次项的三次系统的中心判定问题；Sadovskii[1] 利用 Cherkas 方法解决了一类可约化为 Liénard 系统的三次系统的中心判定问题。但对于一般三次系统及三次以上系统，目前还没有彻底的结论。

Zoladek[2] 将中心问题推广到具有 p: $-q$ 共振奇点的复多项式微分系统：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = px + X_m(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -qy + Y_m(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p,q \in \mathbf{N}, (p,q) = 1, x,y,t \in \mathbf{C}$，而且

$$X_m = \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{k,j}x^{k-j}y^j,\ Y_m = \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=0}^{k} b_{k,j}x^{k-j}y^j$$

尽管对于 $p: -q = 1: -1, p: -q = 1: -2, p: -q = 1: -3, p: -q = 2: -3, p: -q = 3: -q, p: -q = 1: -q$ 等情形下的特殊多项式系统的可积性问题，已有大量的研究成果[3-11]，但对于高次多项式系统的可积性问题，仍需作进一步研究。

1　广义奇点量算法及引理

对于系统（1），由文［12］，可逐项确定形式

* 收稿日期：2013−04−08
基金项目：数学天元基金资助项目（11226041）
作者简介：桑波（1976 年生），男；研究方向：常微分方程定性理论和符号计算；E-mail：sangbo_76@163.com

幂级数

$$F(x,y)=x^q y^p+\sum_{k=p+q+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}B_{k,j}x^{k-j}y^j \qquad (2)$$

使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(1)}=\frac{\partial F}{\partial x}(px+X_m)+$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(-qy+Y_m)=\sum_{k=1}^{\infty}W_n(x^q y^p)^{n+1} \qquad (3)$$

其中 W_n 称为系统（1）在原点的第 n 阶广义奇点量。

下面介绍我们计算广义奇点量的方法。对（3）式中间部分合并同类项得：

$$\frac{\partial F}{\partial x}(px+X_m)+\frac{\partial F}{\partial y}(-qy+Y_m)=$$
$$\sum_{l=p+q+1}^{(p+q)(n+1)-1}\sum_{j=0}^{l}f_{l,j}x^{l-j}y^j+$$
$$\sum_{j=0,j\neq p(n+1)}^{(p+q)(n+1)}f_{(p+q)(n+1),j}x^{(p+q)(n+1)-j}y^j+$$
$$V_n(x^q y^p)^{n+1}+h.o.t.$$

其中 $V_n,f_{l,j},f_{(p+q)(n+1),j}$ 都是关于诸参数 $a_{k,j},b_{k,j}$ 和诸变量 $B_{k,j}$ 的多项式，且关于诸变量 $B_{k,j}$ 是线性的；h. o. t. 表示次数高于 $(p+q)(n+1)$ 的项。

为了从 V_n 消去诸变量 $B_{k,j}$，我们根据文［14］的消元技巧，先指定诸变量 $B_{k,j}$ 的次序，再将诸 $f_{l,j},f_{(p+q)(n+1),j}$ 适当整序得到关于诸变量 $B_{k,j}$ 的三角列 T_n，最后求多项式 V_n+v 关于三角列 T_n 的伪余式 R_n，则第 n 阶广义奇点量 W_n 满足 $W_n=\frac{R_n}{\mathrm{coeff}(R_n,v)}-v$，其中 coeff（$R_n$，$v$）表示多项式 R_n 关于 v 的一次项系数，v 为临时引进的变量。

一方面，系统（1）在原点的各阶广义奇点量都为零是系统在原点可积的充要条件；另一方面由 Hilbert 有限基定理，所有广义奇点量生成的有理数域上的多项式理想是有限生成的，因此可积性问题可在有限步内解决。

考虑右端函数为 n 次复多项式的二维微分自治系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X_n(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y_n(x,y)\end{cases} \qquad (4)$$

定义 1[12]　设 $f(x,y)$ 是一个 $m>0$ 次多项式，如果存在多项式 $h(x,y)$，使得

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{(4)}=h(x,y)f(x,y) \qquad (5)$$

则称 $f=0$ 是系统（4）的 m 次不变代数曲线，并称 f 是系统（4）的代数积分，h 称为 f 的余因子。

注　由上面的定义，多项式 f 是系统（4）的代数积分的充要条件是在纯字典序 plex（x,y）下，$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{(4)}$ 关于 f 的余式 $R\equiv 0$。

引理 1[12]　设 $f_1,f_2,\cdots,f_m$ 是系统（4）的 m 个独立的代数积分，满足

$$\left.\frac{\mathrm{d}f_k}{\mathrm{d}t}\right|_{(4)}=h_k(x,y)f_k(x,y),k=1,2,\cdots,m \quad (6)$$

如果存在一组不全为零的复常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，使得

$$\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2+\cdots+\alpha_m h_m=-\left(\frac{\partial X_n}{\partial x}+\frac{\partial Y_n}{\partial y}\right) \quad (7)$$

则 $f=f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\cdots f_m^{\alpha_m}$ 是（4）一个 Darboux 积分因子。

引理 2[13]　系统（1）在原点可积的充要条件是该系统存在形如（2）的形式首次积分。

2　主要结果

考虑一类以原点为 4∶－5 共振奇点的复三次 Lotka-Volterra 系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(4+a_1x^2+a_2y^2)\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-5+b_1x^2+b_2y^2)\end{cases} \qquad (8)$$

通过计算，我们得到系统（8）的前 8 阶广义奇点量 $W_1,W_2,\cdots,W_8$，其中

$$W_{2k+1}=0,k=0,1,2,3;$$

$$W_2=-\frac{1}{720}b_2a_2^3b_1^5-\frac{197}{92\ 400}b_2^2a_2^2b_1^5-\frac{179}{231\ 000}b_2^3a_2b_1^5+\frac{323}{78\ 848}a_2^4b_1^2a_1^3-\frac{137}{29\ 568}a_2^4b_1^3a_1^2-\frac{27}{22\ 528}a_2^4b_1a_1^4+\frac{1}{576}a_2^4b_1^4a_1-\frac{7\ 681}{17\ 740\ 800}b_2^2a_2^2b_1^2a_1^3-\frac{611}{492\ 800}b_2^2a_2^2b_1^3a_1^2-\frac{19}{1\ 689\ 600}b_2^2a_2^2b_1a_1^4+\frac{4\ 489}{1\ 108\ 800}b_2^2a_2^2b_1^4a_1+\frac{59}{8\ 870\ 400}b_2^3a_2b_1^2a_1^3+\frac{71}{443\ 520}b_2^3a_2b_1^3a_1^2+\frac{1}{4\ 224\ 000}b_2^3a_2b_1a_1^4+\frac{197}{554\ 400}b_2^3a_2b_1^4a_1+\frac{1\ 739}{887\ 040}b_2a_2^3b_1^2a_1^3-\frac{6\ 091}{887\ 040}b_2a_2^3b_1^3a_1^2+\frac{49}{168\ 960}b_2a_2^3b_1a_1^4+\frac{167}{27\ 720}b_2a_2^3b_1^4a_1$$

而第 4 阶、第 6 阶、第 8 阶广义奇点量的项数分别多达 79 项，179 项，319 项，在此不便给出。但读者可根据上节广义奇点量的计算方法，并通过符号计算软件 Maple 7 以上版本编程得到这些广义奇点量。

令 $I_8 = < W_2, W_4, W_6, W_8 >$ 为广义奇点量生成的多项式理想。首先我们使用符号计算软件 Singular 中的命令 minAssGTZ[16] 得到在有限域 Z_{32003} 上多项式理想 I_8 的最小相伴素理想分别为

$$J_1 = < b_1 >,$$
$$J_2 = < a_2 >,$$
$$J_3 = < a_1 - 10\,669 b_1 >,$$
$$J_4 = < a_1 - 2b_1, b_2 + 5\,333 a_2 >,$$
$$J_5 = < a_1 + 16\,000 b_1, b_2 + 5\,333 a_2 >,$$
$$J_6 = < a_1 + 13\,715 b_1, b_2 - 16\,001 a_2 >,$$
$$J_7 = < b_2^2 - 15\,996 b_2 a_2 + 5\,341 a_2^2, a_1 + b_1 >,$$
$$J_8 = < b_2 a_1 - 5 a_2 a_1 + 4 b_2 b_1 >$$

然后根据文［17］的有理重构算法，我们得到在有理数域上多项式理想 I_8 的最小相伴素理想分别为

$$S_1 = < b_1 >,$$
$$S_2 = < a_2 >,$$
$$S_3 = < a_1 - 4/3 b_1 >,$$
$$S_4 = < a_1 - 2b_1, -5/6 a_2 + b_2 >,$$
$$S_5 = < a_1 - 3/2 b_1, -5/6 a_2 + b_2 >,$$
$$S_6 = < a_1 - 4/7 b_1, 1/2 a_2 + b_2 >,$$
$$S_7 = < 11/2 b_2 a_2 + b_2^2 + \frac{43}{6} a_2^2, a_1 + b_1 >,$$
$$S_8 = < b_2 a_1 - 5 a_2 a_1 + 4 b_2 b_1 >$$

定理 1 系统（8）在原点可积的必要条件是下列八组条件之一成立：

（i）$b_1 = 0$；

（ii）$a_2 = 0$；

（iii）$a_1 = 4/3 b_1$；

（iv）$a_1 = 2b_1, a_2 = 6/5 b_2$；

（v）$a_1 = 3/2 b_1, a_2 = 6/5 b_2$；

（vi）$a_2 = -2b_2, b_1 = 7/4 a_1$；

（vii）$a_1 = -b_1, a_2 = \left(-\frac{33}{86} \pm \frac{1}{86}\sqrt{57}\right) b_2$；

（viii）$a_2 = 1/5 \dfrac{b_2(4b_1 + a_1)}{a_1}$

除条件（vii）外，其它条件也是充分的。

证明 （必要性）只需求解多项式集 $G = \{W_2, W_4, W_6, W_8\}$，但由于这一过程非常复杂，我们无法在有理数域上直接给出零点分解。

设 $V(P)$ 为多项式集 P 的零点集，下面首先证明 $V(G) \subseteq \bigcup_{k=1}^{8} V(S_k)$。令 $T = \bigcap_{k=1}^{8} S_k = < T_1, T_2, \cdots, T_{10} >$ 为理想 $S_1, S_2, \cdots, S_8$ 的交，其中 $T_k, k = 1, 2, \cdots, 10$ 为理想 T 的生成元。对任意的 $k = 1, 2, \cdots, 10$，通过计算可知多项式集 $\{1 - tT_k\} \cup G$ 的 Gröbner 基[15] 为 $\{1\}$，因此 $V(G) \subseteq \bigcup_{k=1}^{8} V(S_k)$。另一方面容易验证 $\bigcup_{k=1}^{8} V(S_k) \subseteq V(G)$。最后注意到定理 1 的八组条件依次对应于 $V(S_k)$，$k = 1, 2, \cdots, 8$。

（充分性）当条件（i）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(4 + a_1 x^2 + a_2 y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-5 + b_2 y^2) \end{cases} \tag{9}$$

系统（9）以函数

$$\mu(x,y) = y^{-\frac{13}{5}}(-5 + b_2 y^2)^{-1} x^{-3} \cdot \left((-5 + b_2 y^2)^{-1/5\frac{4b_2 + 5a_2}{b_2}}\right)^{-1}$$

为积分因子，因此系统（9）在原点可积。

当条件（ii）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(4 + a_1 x^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-5 + b_1 x^2 + b_2 y^2) \end{cases} \tag{10}$$

系统（10）以函数

$$\mu(x,y) = (1 + 1/4 a_1 x^2)^{1/4\frac{4b_1 + a_1}{a_1}} x^{-7/2} y^{-3}$$

为积分因子，因此系统（10）在原点可积。

当条件（iii）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(4 + 4/3 b_1 x^2 + a_2 y^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-5 + b_1 x^2 + b_2 y^2) \end{cases} \tag{11}$$

假设系统（11）具有形式首次积分 $F(x,y) = \sum_{k=2}^{\infty} v_k(x) y^{2k}$，则有递推方程

$$\frac{d}{dx} v_n(x) = \frac{(10n - 2nb_1 x^2) v_n(x)}{4/3 b_1 x^3 + 4x} + \frac{(2b_2 - 2nb_2) v_{-1+n}(x)}{4/3 b_1 x^3 + 4x} - \frac{x\left(\frac{d}{dx} v_{-1+n}(x)\right) a_2}{4/3 b_1 x^3 + 4x} \tag{12}$$

设 $v_1(x) = 0$，通过求解递推方程并令积分常数为 1 可得

$$v_2(x) = \frac{x^5}{(b_1 x^2 + 3)^4} \tag{13}$$

下面利用数学归纳法证明当 $n \geqslant 2$ 时，

$$v_n(x) = \frac{P_{2n+1}(x)}{(b_1 x^2 + 3)^{2n}} \tag{14}$$

其中 $P_{2n+1}(x)$ 表示次数为 $2n + 1$ 次的多项式。

当 $n = 2$ 时，结论显然成立。

假设当 $n = k$ 时，

$$v_k(x) = \frac{P_{2k+1}(x)}{(b_1 x^2 + 3)^{2k}} \tag{15}$$

其中 $P_{2k+1}(x)$ 表示次数为 $2k+1$ 次的多项式。

将 $n=k+1$ 和（15）式代入递推方程，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v_{k+1}(x)=-\frac{3}{2}\frac{(-5+b_1x^2)(k+1)v_{k+1}(x)}{x(b_1x^2+3)}-\frac{3}{4}\frac{(b_1x^2+3)^{-2k-2}Q_{2k+3}(x)}{x} \tag{16}$$

其中

$$Q_{2k+3}(x)=x^3a_2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{2k+1}(x)\right)b_1-2kP_{2k+1}(x)b_1(-b_2+2a_2)x^2+3xa_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{2k+1}(x)+6kb_2P_{2k+1}(x)$$

为 $2k+3$ 次多项式。求解方程（16）并令积分常数为零，我们得到 $v_{k+1}(x)$ 具有如下形式

$$v_{k+1}(x)=\frac{P_{2k+3}(x)}{(b_1x^2+3)^{2k+2}} \tag{17}$$

其中 $P_{2k+3}(x)$ 表示次数为 $2k+3$ 次的多项式。即当 $n=k+1$ 时，结论成立。

综上，系统（11）具有形式首次积分

$$F(x,y)=\sum_{k=2}^{\infty}P_{2k+1}(x)(b_1x^2+3)^{-2k}y^{2k}$$

其中 $P_{2k+1}(x)$ 为 $2k+1$ 次多项式，从而由引理 2，系统（11）在原点可积。

当条件（iv）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(4+2b_1x^2+6/5b_2y^2)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-5+b_1x^2+b_2y^2)\end{cases} \tag{18}$$

同情形（iii）的证明类似，利用数学归纳法可证系统（18）具有形式首次积分

$$F(x,y)=\sum_{k=2}^{\infty}P_{2k}(y)(b_2y^2-5)^{-2k-1}x^{2k+1}$$

其中 $P_{2k}(y)$ 为 $2k$ 次多项式，$P_4(y)=y^4$。从而由引理 2，系统（18）在原点可积。

当条件（v）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(4+3/2b_1x^2+6/5b_2y^2)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-5+b_1x^2+b_2y^2)\end{cases} \tag{19}$$

同情形（iii）的证明类似，利用数学归纳法可证系统（19）具有形式首次积分

$$F(x,y)=\sum_{k=2}^{\infty}P_{2k}(y)(b_2y^2-5)^{-2k-1}x^{2k+1}$$

其中 $P_{2k}(y)$ 为 $2k$ 次多项式，$P_4(y)=y^4$。从而由引理 2，系统（19）在原点可积。

当条件（vi）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(4+a_1x^2-2b_2y^2)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-5+7/4a_1x^2+b_2y^2)\end{cases} \tag{20}$$

同情形（iii）的证明类似，利用数学归纳法可证系统（20）具有形式首次积分

$$F(x,y)=\sum_{k=2}^{\infty}P_{4k-3}(x)(a_1x^2+4)^{-3k}y^{2k}$$

其中 $P_{4k-3}(x)$ 为 $4k-3$ 次多项式，$P_5(x)=x^5$。从而由引理 2，系统（20）在原点可积。

当条件（vii）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(4-b_1x^2+\left(-\dfrac{33}{86}\pm\dfrac{1}{86}\sqrt{57}\right)b_2y^2\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-5+b_1x^2+b_2y^2)\end{cases} \tag{21}$$

对于系统（21），我们没有找到其形式首次积分或积分因子，但通过计算可知其前 30 阶广义奇点量全部为零，因此我们猜想系统（21）在原点可积。

当条件（viii）成立时，系统（8）化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(4+a_1x^2+\dfrac{b_2(4b_1+a_1)}{5a_1}y^2\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-5+b_1x^2+b_2y^2)\end{cases} \tag{22}$$

系统（22）以函数

$$\mu(x,y)=y^{-\frac{13a_1+4b_1}{4b_1+5a_1}}x^{-\frac{4b_1+15a_1}{4b_1+5a_1}}$$

为积分因子，因此系统（22）在原点可积。

参考文献：

[1] SADOVSKII A P, SHCHEGLOVA T V. Solutions of the center focus problem for a nine-parameter cubic system [J]. Differential Equations, 2011, 47(2): 208 − 223.

[2] ŻOŁADEK H. The problem of center for resonant singular points of polynomial vector fields [J]. Journal of differential equations, 1997, 137(1): 94 − 118.

[3] ROMANOVSKI V G, SHCHEGLOVA N L. The integrability conditions for two cubic vector fields [J]. Differential Equations, 2000, 36(1): 108 − 112.

[4] FERČEC B, GINÉ J, LIU Y R, et al. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quartic systems having homogeneous nonlinearities [J]. Acta Appl Math, 2012, 18: 1 − 16.

[5] GINÉ J, ROMANOVSKI V G. Integrability conditions for Lotka-Volterra planar complex quintic systems [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(3): 2100 − 2105.

（下转第 52 页）

参考文献：

［1］ 王光瑞，于熙龄，陈式刚. 混沌的控制、同步与利用［M］. 北京：国防工业出版社，2001.

［2］ 关新平等. 混沌控制及其在保密通信中的应用［M］. 北京：国防工业出版社，2002.

［3］ 陈红兵. 一类具有收获率互惠系统的稳定性及 Hopf 分岔［J］. 中山大学学报：自然科学版，2013，52（1）：45－50.

［4］ GOPALSAMY K. Stability and oscillations in delay difernetial equations population. dynamics［M］. Kluwer Academic：Dordrecht，1992：22－33

［5］ PECORA L，CARROLL T. Synchronization in chaotic systems［J］. Phys Rev Lett，1990，64：821－827.

［6］ LI Y，LI B. Chaos control and projective synchronization of a chaotic Chen-Lee system［J］. Chinese Journal of Physics，2009，47：297－306.

［7］ XIE C，XU Y，Chaos control and synchronization of a complex chaotic system［J］. IWCFTA，2010：1：71－76.

［8］ 王瑞萍. 基于分数阶 PD 控制器的永磁同步电动机控制［J］. 中山大学学：自然科学版，2013，52（3）：34－39.

［9］ LI Y，CHEN Y，LI B. Adaptive control and function projective synchronization in 2D discrete-time chaotic systems［J］. Commun Theor Phys，2009，51：270－281.

［10］ LI Y，CHEN Y，LI B. Anticipated function synchronization with unknown parameters in discrete-time chaotic systems［J］. International Journal of Modern Physics C，2009，20：597－608.

［11］ CHENY，AN H L，LI Z B. The function cascade synchronization approach with uncertain parameters or not for hyperchaotic systems［J］. Appl Math Computer，2008，197：96－108.

［12］ LI X. Function projective synchronization of two identical new hyperchaotic systems［J］. Comm in theor Physics，2007，48：864－873.

［13］ LI Y，ZHENG C L. The complex network synchronization via chaos control nodes［J］. Journal of Applied Mathematics，2013，63：1－12.

（上接第47页）

［6］ LIU C J，CHEN G T，LI C Z. Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra systems［J］. Journal of Differential Equations，2004，198（2）：301－320.

［7］ FERČEC B，CHEN X W，ROMANOVSKI V G. Integrability conditions for complex systems with homogeneous quintic nonlinearities［J］. Journal of Applied Analysis and Computation，2011，1（1）：9－20.

［8］ LIU C J，CHEN G T，CHEN G R. Integrability of Lotka-Volterra type systems of degree 4［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2012，388（2）：1107－1116.

［9］ GINÉ J，CHRISTOPHER C，PRESERN M，et al. The resonant center problem for a 2：－3 resonant cubic lotka-volterra system［C］. CASC，2012：129－142.

［10］ CHEN X W，GINÉ J，ROMANOVSKI V G，et al. The 1：－q resonant center problem for certain cubic Lotka-Volterra systems［J］. Applied Mathematics and Computation，2012，218（23）：11620－11633.

［11］ HU Z P，ROMANOVSKI V G，SHAFER D S. 1：－3 resonant centers on C^2 with homogeneous cubic nonlinearities［J］. Computers and Mathematics with Applications，2008，56（8）：1927－1940.

［12］ 刘一戎，李继彬. 平面向量场的若干经典问题［M］. 北京：科学出版社，2010.

［13］ MATTEI J F，MOUSSU R. Holonomie et intégrates premières［J］. Ann Sci Ecole Normale Superieure，1980，13（4）：469－523.

［14］ 杨路，张景中，侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明［M］. 上海：上海科技教育出版社，1996.

［15］ 刘木兰. Gröbner 基理论及其应用［M］. 北京：科学出版社，2000.

［16］ ZEIDLER E，GREUEL G M，PFISTER G. A singular introduction to commutative algebra［M］. Berlin：Springer-Verlag，2002.

［17］ WANG P S，GUY M J T，DAVENPORT J H. P-adic reconstruction of rational numbers［J］. SIGSAM Bull，1982，16（2）：2－3.